

Varianta 34

SUBIECTUL I

a) $BC = 10$.

b) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ punctele sunt coliniare.

c) $AB = 5\sqrt{2}$.

d) $S_{ABC} = \frac{25}{2}$.

e) $2\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{5}{4}$.

f) $\operatorname{Re}(z) = 0$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = 3$.

b) $C_5^1 + C_5^4 = 10$.

c) $T_3 = 6$.

d) $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

e) $x \in \{-3; 2\}$.

2.

a) $f(1) = 8$.

b) $f'(x) = 42x^5$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0$.

d) $x = 0$ este punct de minim local.

e) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A + B) = 1$.

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } A^3 = A^2 \cdot A = O_3.$$

$$\text{c) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Analog } B \cdot A = A \cdot B = I_3 - B.$$

$$\text{d) } (A + I_3) \cdot B = AB + B \stackrel{c)}{=} I_3 - B + B = I_3.$$

$$\text{e) } (I_3 - A^2)(I_3 + A^2) = I_3 + A^2 - A^2 - A^4 = I_3.$$

$$\text{f) } A^2 + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } \det(A^2 + B) = 1 \text{ și } \det(A + B) = 1, \det B = 1.$$

$$\begin{aligned} &\text{Atunci } \det(A + B) + \det(A^2 + B) + \dots + \det(A^{10} + B) = \\ &= \det(A + B) + \det(A^2 + B) + 8 \cdot \det B = 1 + 1 + 8 = 10. \end{aligned}$$

$$\text{g) } \text{Pentru } n=1 \text{ avem } (I_3 + A)^1 = I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ adevărat.}$$

Presupunem adevărat pentru $n = k$. Vom demonstra că este adevărată și pentru $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} (I_3 + A)^{k+1} &= (I_3 + A)^k \cdot (I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2 - k \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) & 2k^2 + 3k + 1 \\ 0 & 1 & 2(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{În baza inducției matematice avem: } (I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 - n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Subiectul IV

$$\text{a) } f(2) + f(3) = \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} = -\ln 2.$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}, x > 0.$$

$$\text{c) } \int_1^e (x+1) \cdot f'(x) dx = \int_1^e (x+1) \cdot \frac{1}{x(x+1)} dx = \ln e - \ln 1 = 1.$$

$$\text{d) } f'(x) > 0, \forall x > 0, \text{ deci } f \text{ este strict crescătoare pe } (0, \infty).$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_1^e \left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx &= \int_1^e \left(\ln \frac{x}{x+1} - \ln \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty. \end{aligned}$$